Homework 8

Sun Kai

5110309061

1. 首先证明是包含的群。

∵

又∵易验证对于任意，，且对于任意，均存在满足

∴是包含的群

然后证明G是包含的群中最小的。

设X为包含的群，则

∵

∴

即

∴G⊆X

∴G是包含的群中最小的

1. 设群为G

∵

∴

∴

∴

∴

∴已知的关系可以重写为, ,

∵

∴

易见在连接操作符下封闭

∴

1. (a)如图，设立方体的8个顶点为。

用表示将立方体沿着所确定的平面逆时针旋转90o，即:

->

用表示将立方体沿着所确定的平面逆时针旋转90o，即:

->

则G=

(b)对于一个立方体，易见可以通过旋转变换得到中不同的展现方式（表示从6个面中选择一个面作为底面，4表示底面固定后正视的面的选择有4种）。即这24种不同的展现方式均等价，而这与(a)中所求置换群G共有24个置换恰好对应。

1. (a)

(b)设O1,O2G，则O1O2的值如下

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| O1  O2 |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |

1. 置换群G=在置换下不变的元素个数分别为512，8，32，8，64，64，64，64，所以由Burnside定理，可得：

等价类数N=(512+8+32+8+64+64+64+64)/8=102

1. (a)39

(b)由于b1与b2属于同一等价类，从而存在置换q作用于b2得到b1，对于任意置换x，若x作用于b1后得到b2，则置换qx作用于b1后得到b1，并且显然对于不同的x，qx均不同，从而得到”作用于b1后得到b1的置换数“大于等于”作用于b1后得到b2的置换数”。

由于b1与b2属于同一等价类，从而存在置换p作用于b1得到b2。对于任意置换y，若置换y对棋局b1作用后所得局面仍为b1，则置换py作用于b1得到b2，并且显然对于不同的x，qx均不同，从而得到”作用于b1后得到b2的置换数“大于等于”作用于b1后得到b1的置换数”。

综上所述，”作用于b1后得到b2的置换数“等于”作用于b1后得到b1的置换数”。

(c)

1. (a) 2

解释：因为有操作符，所以必增加操作符（易证）,而易见仍不能形成一个群，所以增加的操作符数至少为2。易验证在增加操作符的基础上再增加操作符即可形成一个群，所以答案为2。

(b) 设O1,O2G=，则O1O2的值如下

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| O1  O2 |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |